ГОДИШЕН ЗБОРНИК
НА ФИЛОЗОФСКИОТ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ ВО СКОПЈЕ
Природно-математички оддел
Книга 4 (1951), № 5
ANNUAIRE
DE LA FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
Section des sciences naturelles
Tome 4 (1951), № 5

Благој С. Попов

ЗА ЕДНА ПРОСТА ОСОБИНА НА ИЗВОДИТЕ НА НЕКОИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

B. S. Popov

ON A PROPERTY OF THE DERIVATIVES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Скопје — Skopje
1951

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ЗА ЕДНА ПРОСТА ОСОБИНА НА ИЗВОДИТЕ НА НЕКОИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ

1. Да го земеме полиномот

$$(1)\qquad R_n(x) = c_n D^n\left[(x-a)^n (x-b)^n\right], \quad D = \frac{d}{dx},$$

каде што се a и b произволни фиксирани броjеви и c_n произволна константа.

Со последователно диференцирање на (1), добиваме

$$(2)\qquad R_n^{(r)}(x) = c_n D^{n+r}\left[(x-a)^n (x-b)^n\right].$$

Применувајќи ја формулата на Leibniz, имаме[4])

$$(3)\qquad R_n^{(r)}(x) = c_n \sum_{k=r}^{n} \binom{n+r}{k} \frac{n!}{(k-r)!} (x-a)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-b)^{k-r},$$

зимајќи предвид дека

$$\binom{n+r}{k} D^k (x-a)^n D^{n+r-k} (x-b)^n = 0,$$

за секое $n < k$ или $k < r$.

Од (3) имаме

$$(4)\qquad R_n^{(r)}(a) = c_n \binom{n+r}{r} n!\, n(n-1)\cdots(n-r+1)(a-b)^{n-r},$$

и

$$R_n^{(r)}(b) = (-1)^{n+r} R_n^{(r)}(a).$$

2. Полиномите на Legendre се добиваат од (1) ако се земе

$$a = 1, \ b = -1, \ c_n = \frac{1}{2^n \, n!},$$

т. е.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \, D^n (x^2 - 1).$$

Од (4) ја добиваме како партикуларен случај особината на полиномот $P_n(x)$

$$P_n^{(r)}(1) = (2r - 1)!! \binom{n+r}{2r}, \tag{5}$$

$$(2r - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2r - 1),$$

дадена од Grosswald[1].

Исто така од (4) ја добиваме особината

$$P_n^{(r)}(-1) = (-1)^{n+r} P_n^{(r)}(1).$$

3. До особината (5) може да се дојде и ако го искористуваме изразувањето на полиномите $P_n(x)$ со помошта на хипергеометриските функции.

Од

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

каде што е

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum \frac{(\alpha)_n (\alpha)_n}{(\gamma)_n (1)_n} x^n,$$

$$(\omega)_r = \omega(\omega + 1) \cdots (\omega + r - 1), \ (\omega)_0 = 1,$$

зимајќи предвид дека

$$\frac{d^r F}{dx^r} = \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{(\gamma)_r} F(\alpha + r, \beta + r, \gamma + r, x), \tag{6}$$

добиваме

$$P_n^{(r)}(x) = (2r - 1)!! \binom{n+r}{2r} F\left(r - n, r + n + 1, r + 1, \frac{1-x}{2}\right).$$

Очевидно, од тука за $x = 1$ ја имаме релацијата (5).

4. Legendre ги е дефинирал полиномите $P_n(x)$ како коефициенти на степените z од развивањето[5])

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n .$$

Ако ја развиеме поопштата функција[3])

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x) z^n ,$$

во степенен ред од z, коефициентите $C_n^{\nu}(x)$ на овој ред за произволно ν, претставуваат полиноми наречени Gegenbauer-ови[2]), којшто ги опфаќаат тие на Legendre како специјални случај за $\nu = 1/2$.

Изразени со помошта на хипергеометриските функции, тие се

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)} F\left(n+2\nu, -n, \nu+{}^1/_2, \frac{1-x}{2}\right).$$

Според (6) ќе имаме

$$\left[C_n^{\nu}(x)\right]^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\Gamma(2\nu+2r)\Gamma(\nu)} F\left(n+2\nu+r, r-n, \nu+r+\frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right).$$

Од тука имаме особина аналогна на (5), за полиномите $C_n^{\nu}(x)$ на Gegenbauer

$$\left[C_n^{\nu}(1)\right]^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\Gamma(2\nu+2r)\Gamma(\nu)} .$$

5. Полиномите на Tschebyscheff $T_n(x)$ дефинирани се со[3])

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \sqrt{1-x^2}\, D^n (1-x^2)^{n-1/2} ,$$

За нив ја добиваме особината

$$T_n^{(r)}(1) = n(2r-2)!! \binom{n+r-1}{2r-1} .$$

B. S. Popov

ON A PROPERTY OF THE DERIVATIVES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

(Summary)

The purpose of this paper is to give an alternative proof and a generalization of the result

(1)
$$P_n^{(r)}(1)=(2r-1)!!\binom{n+r}{2r},$$

$$(2r-1)!!=1\cdot 3\cdots(2r-1),$$

given by Grosswald, [1][1] where $P_n(x)$ are Legendre polynomials. We deduce too analogical property of Gegenbauer [2] and Tschebyscheff [3] polynomials.

1. Let $R_n(x)$ be the polynomials

$$R_n(x)=c_n D^n\left[(x-a)^n(x-b)^n\right], \qquad D=\frac{d}{dx},$$

with a and b arbitrary fixed number and c_n an arbitrary constant.

By using Leibniz's formula, we obtain [4]

$$R_n^{(r)}(x)=c_n\sum_{k=r}^{n}\binom{n+r}{k}\frac{n!}{(k-r)!}(x-a)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-b)^{k-r},$$

according to the relation

$$\binom{n+r}{k}D^k(x-a)^n D^{n+r-k}(x-b)^n=0,\ n<k,\ k<r.$$

Then we have

(2)
$$R_n^{(r)}(a)=c_n\binom{n+r}{r}n!\binom{n}{r}r!(a-b)^{n-r},$$

When the constants have particular values

$$a=1,\ b=-1,\ c_n=\frac{1}{2^n\,n!},$$

the polynomials $R_n(x)$ are called the Legendre polynomials. We immediately find then the relation (1) obtained by Grosswald.

From (2) we obtain the following analogical property

$$P_n^{(r)}(-1)=(-1)^{n-r}P_n^{(r)}(1).$$

[1]) Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

2. Another proof of the property (1) involves the use of the functions hypergeometrics.

It is well known the relation

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

and it follows

$$P_n^{(r)}(x) = (2r-1)!! \binom{n+r}{2r} F\left(r-n, r+n+1, r+1, \frac{1-x}{2}\right).$$

It is obvious that for $x=1$ we obtain the relation (1).

3. Legendre defined the polynomials $P_n(x)$ as well as the coefficients of the powers of z in the expansion [5]

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = \sum_n P_n(x) z^n .$$

More general functions $C_n^\nu(z)$ are defined by the coefficients of z in the expansion of

$$(1-2xz+z^2)^{-\nu} = \sum_n C_n^\nu(x) z^n ,$$

and they are known as the Gegenbauer polynomials.

Differentiating r times with respect to x and putting $x=1$, we get [6]

$$2^r \nu(\nu+1)\cdots(\nu+r-1) z^r (1-z)^{-2(\nu+r)} = \sum_n \left[C_n^\nu(x)\right]_{x=1}^{(r)} z^n .$$

We obtain in this case, equating coefficients of z^n

(3) $$\left[C_n^\nu(x)\right]_{x=1}^{(r)} = 2^r \frac{\Gamma(n+2\nu+r)\,\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(n+1-r)\,\Gamma(2\nu+2r)\,\Gamma(\nu)} .$$

With the assistance of the functions hypergeometriques

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\nu)} F(n+2\nu, -n, \nu+1/2, (1-x)/2),$$

we obtain too (3).

For the Tschebyscheff polynomials

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} D^n (1-x^2)^{n-1/2},$$

we find the analogical relation

$$T_n^{(r)}(1) = n(2r-2)!! \binom{n+r-1}{2r-1} .$$

BIBLIOGRAPHY

1. E. Grosswald

   On a simple property of the derivatives of Legendre's polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society v. 1 (1950), pp. 553—554.

2. L. Gegenbauer

   Ueber die Function $C_n^\nu(x)$, Sitzungsber. Akad. Wien 100. 745—746 (1891)

3. W. Magnus—F. Oberhettinger

   Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin 1943, S. 76—80.

4. G. Scegö

   Mathematical Reviews, Vol. 12, № 3, p. 178

5. H. Laurent

   Traité d'analyse T. V, p. 185 (1890).

6. N. Du Plessis

   A Note abaut the derivatives of Legendue polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society, v. **2**, N. 6. (1951) p. 950.